Geometria e Algebra **_Facoltà di Ingegneria Meccanica_(Università Federico II)**
Anno Accademico 2013/2014 Esercitazione 17 Aprile 2014

Exercise 1 *Nello spazio vettoriale canonico $\mathbb{R}^4$ consideriamo i seguenti sistemi di vettori:*

(a) $H = [(0,1,-1,1),(1,0,1,1),(1,0,0,1),(0,1,0,1)]$ $K = [(1,1,0,0),(0,0,1,1),(1,1,-1,-1)]$

(b) $H = [(1,0,-1,1),(-1,0,1,-1)]$ $K = [(0,0,1,1),(1,-1,1,-1),(-1,1,0,2)]$

(c) $H = [(-1,1,-1,1),(0,1,0,-1),(1,0,1,-2)]$ $K = [(0,0,0,1),(1,2,-1,1),(1,1,-1,0)]$

In ciascuno dei casi precedenti determinare una rappresentazione parametrica e una rappresentazione cartesiana di $L(H), L(K), L(H)+L(K)$ e la dimensione dei relativi sottospazi vettoriali, esibendo anche una base. Determinare in ciascun caso anche la dimensione di $L(H)\cap L(K)$. Dire in quali casi $\mathbb{R}^4$ è somma, somma diretta di $L(H)$ e $L(K)$ e in quali casi $L(H)$ e $L(K)$ sono complementari.

Remark 1 *Un'equazione lineare omogenea in n variabili a coefficienti in $\mathbb{R}$ è un'espressione del tipo:*

$$a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = 0 \text{ con } a_i \in \mathbb{R}$$

Example 1 *L'espressioni in tre variabili x, y, z*

$$2x - y = 0, \qquad x - y + 2z = 0, \qquad 2x - z = 0, \qquad y = 0$$

sono equazioni lineari omogenee.

Definition 1 *Un sistema di equazioni lineari omogenee si dice indipendente se nessuna di esse si può ottenere come combinazione lineare delle altre. La stessa cosa in sostanza dei vettori e in caso contrario si dice dipendente.*

Example 2 *Se consideriamo i seguenti sistemi di equazioni lineari omogenee in tre variabili:*

$$(a) \qquad [2x - y = 0, 2x - y - z = 0, z = 0]$$
$$(b) \qquad [x - y + z = 0, x - z = 0, 2x + y + z = 0]$$

IL primo sistema è dipendente e il secondo indipendente.
Perchè le equazioni lineari omogenee in n variabili rivestono un ruolo importante?
La risposta sta nei due successivi enunciati e quando parliamo di spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$ lo intendiamo dotato della struttura canonica di spazio vettoriale.

Proposition 1 *Se H è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ di dimensione $h < n$, allora esso può essere rappresentato da un sistema di $n - h$ equazioni lineari omogenee indipendenti in n variabili a coefficienti in $\mathbb{R}$.*

Vale anche la seguente:

Proposition 2 *Un sistema indipendente di $n-h$ equazioni lineari omogenee in n variabili a coefficienti in $\mathbb{R}$ individua un sottospazio H di dimensione h di $\mathbb{R}^n$.*

Example 3 *Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ consideriamo il seguente insieme:*

$$H = \{(x, y, z) \mid x - y - z = 0,\ x + z = 0\}$$

In virtù dell'ultima proposizione enunciata possiamo affermare che H è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$ di dimensione 1 (le equazioni indipendenti sono 2). Per determinare una base di tale sottospazio vettoriale H è sufficiente risolvere il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} x - y - z = 0 \\ x + z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -z \\ y = 2z \end{cases}$$

Possiamo scrivere che $H = \{(-z, 2z, z) \mid z \in \mathbb{R}\} = \{z(-1, 2, 1) \mid z \in \mathbb{R}\} = L(S)$ con $S = [(-1, 2, 1)]$. In conclusione $\dim(H) = 1$ e una sua base è data da $S = [(-1, 2, 1)]$.

Remark 2 *Se $(V.+, *, IK)$ è uno spazio vettoriale, ricordo che tra i suoi sottospazi vettoriali ci sono $H = \{0\}$ e $H = V$. Sappiamo che $\dim(\{0\}) = 0$ e una sua base si conviene essere il sistema $S = \varnothing$.*

Exercise 2 *Determinare una base e la relativa dimensione dei seguenti sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^3$:*

$$H = \{(x, y, z) \mid x + 2y + z = 0,\ x - z = 0\}$$
$$H = \{(x, y, z) \mid x - 2y + z = 0\}$$
$$H = \{(x, y, z) \mid x - y = 0, x + y + z = 0, x - z = 0\}$$

Exercise 3 *Determinare una base e la relativa dimensione dei seguenti sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^4$:*

$$H = \{(x, y, z.t) \mid x - z + t = 0,\ x + y = 0\}$$
$$H = \{(x, y, z, t) \mid x - y + z - t = 0\}$$
$$H = \{(x, y, z, t) \mid x + y = 0, x - y + z + t = 0, z = 0\}$$
$$H = \{(x, y, z, t) \mid x + y = 0, x - y = 0, x + 2y - z + t = 0, x - 2y - z + 2t = 0\}$$

Example 4 *Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ consideriamo il seguente sistema di vettori:*

$$H = [(1, 0, 0, 1), (0, 1, 0, 1)] \qquad K = [(1, 0, 0, 0), (0, 0, 1, 1)]$$

Determinare una base e la dimensione di $L(H) \cap L(K)$.

Remark 3 *Osserviamo che le rappresentazioni cartesiane di un sottospazio vettoriali non sono uniche!*

PROCEDIMENTO

Si determina una rappresentazione cartesiana di $L(H) = \{(x, y, z, t) \mid x + y - t = 0, z = 0\}$

Si determina una rappresentazione cartesiana di $L(K) = \{(x, y, z, t) \mid z - t = 0, y = 0\}$

A questo punto risulta evidente che $L(H) \cap L(K)\{(x, y, z, t) \mid x + y - t = 0, z = 0, z - t = 0, y = 0\}$.

Se vogliamo determinare una base e la dimensione di $L(H) \cap L(K)$ dobbiamo risolvere il sistema lineare:

$$\begin{cases} x + y - t = 0 \\ z = 0 \\ z - t = 0 \\ y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \\ t = 0 \end{cases}.$$

Dunque $\dim(L(H) \cap L(K)) = 0$ e $S = \varnothing$ è una sua base, dalla formula di Grassmann si deduce che $\dim(L(H) + L(K)) = \dim(L(H)) + \dim(L(K)) - \dim(L(H) \cap L(K)) = 2 + 2 - 0 = 4$.

Questo ci permette di concludere che il sistema $M = H \cup K = [(1, 0, 0, 1), (0, 1, 0, 1), (1, 0, 0, 0), (0, 0, 1, 1)]$ è linearmente indipendente e ancora che $\mathbb{R}^4$ è somma diretta di $L(H)$ e $L(K)$.

Exercise 4 *Utilizzando il metodo appena descritto determinare una base e la relativa dimensione di $L(H) \cap L(K)$ dell'esercizio 1.*