Forum Mateweb

Passa al contenuto

Cerca... Cerca
Ricerca avanzata

- Indice ‹ Ingegneria Federico II ‹ Registro delle lezioni Ingegneria Meccanica Gruppo (A-DE) ‹ Appunti delle lezioni
- Modifica dimensione carattere
- Stampa pagina

- FAQ
- Iscriviti
- Login

Prima lezione (6 Marzo 2013)

Rispondi al messaggio

Cerca qui... Cerca

14 messaggi • Pagina **1** di **2** • **1**, 2

Prima lezione (6 Marzo 2013)

da **mateweb** » venerdì 15 marzo 2013, 8:32

PREMESSA
In queste prime lezioni l'obiettivo da raggiungere è la definizione di **spazio vettoriale su un campo**. Quello che ho appena detto non dice assolutamente nulla, fa intendere solo che c'è da tribolare prima di raggiungere la meta prefissata. Partiremo da lontano e faremo alcune premesse per rendere più naturale la definizione che ci siamo posti di enunciare. Qualche accenno alle strutture algebriche è d'obbligo, tali nozioni culmineranno con la definizione di **campo**.

STRUTTURE ALGEBRICHE
Definizione Supponiamo che G sia un insieme non vuoto. Si dice operazione binaria interna a G una qualsiasi funzione $\perp : GxG \to G$, con $(a,b) \in GxG$ e $\perp(a,b) = a \perp b \in G$. In altre parole una operazione binaria interna a G è una legge che "associa" ad ogni coppia di elementi di GxG uno e un solo elemento di G. La coppia $(G, \perp)$ è una **struttura algebrica** che si chiama GRUPPOIDE. Ricordiamo che per *struttura algebrica* intendiamo un insieme dotato di almeno una operazione, in tal senso il GRUPPOIDE è la più semplice struttura algebrica. Una delle motivazioni che spinge ad odiare le definizioni è lo scetticismo che si nutre riguardo alla loro difficoltà di vederle applicate a cose concrete. Per sfatare ogni titubanza riportiamo un esempio.

Esempio Solo per citarne alcune, prendiamo in considerazione $(\mathbb{N}, +)$, $(\mathbb{N}, \cdot)$ e $(\mathbb{Z}, +)$.
$+ : \mathbb{N}\ x\ \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ con $+(a,b) = a + b$.

$\cdot : \mathbb{N} \; x \; \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ con $\cdot(a, b) = a \cdot b$.
$+ : \mathbb{Z} \; x \; \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ con $+(a, b) = a + b$.

Conosciamo bene queste strutture, ci hanno insegnato fin da piccoli ad operare con i numeri naturali e i numeri interi.

Quello che possiamo senza dubbio affermare, dopo un'analisi attenta, è che non tutti i gruppoidi meritano riconoscimenti dello stesso grado. A tal riguardo analizziamo più da vicino i gruppoidi $(\mathbb{N}, +)$ e $(\mathbb{N}, \cdot)$. Abbiamo lo stesso insieme dotato di due operazioni distinte.

In $(\mathbb{N}, +)$ l'operazione $+$ risulta essere:

ASSOCIATIVA: $(a + b) + c = a + (b + c) \;\; \forall a, b, c \in \mathbb{N}$
COMMUTATIVA: $a + b = b + a \;\; \forall a, b, \in \mathbb{N}$

In $(\mathbb{N}, \cdot)$ l'operazione $\cdot$ risulta essere:

ASSOCIATIVA: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) \;\; \forall a, b, c \in \mathbb{N}$
COMMUTATIVA: $a \cdot b = b \cdot a \;\; \forall a, b \in \mathbb{N}$
ELEMENTO NEUTRO: $1 \cdot a = a \;\; \forall a \in \mathbb{N}$

Da questo esempio non possiamo non dire che in un insieme la differenza, in termini di qualità, è una carta vincente che si trova nelle mani dell'operazione.

La “bontà” di un **gruppoide** è valutata dalle proprietà di cui può godere l'operazione. Ci accingiamo a fare una classificazione dei gruppoidi mettendo in evidenza le proprietà verificate dall'operazione.

Definizione Supponiamo che la coppia $(G, \perp)$ sia un gruppoide. Se l'operazione è associativa: $(x \perp y) \perp z = x \perp (y \perp z) \;\; \forall x, y, z \in G$, allora esso merita il nome di SEMIGRUPPO.

Esempio I gruppoidi $(\mathbb{N}, +)$ e $(\mathbb{N}, \cdot)$ sono semigruppi.

Definizione Supponiamo che la coppia $(G, \perp)$ sia un semigruppo. Se l'operazione è dotata di elemento neutro e: $e \perp x = x \perp e = x \;\; \forall x \in G$, allora esso merita il nome di MONOIDE.

Esempio I gruppoidi $(\mathbb{N}_0, +)$ e $(\mathbb{N}, \cdot)$ e sono monoidi.

Osservazione Supponiamo che la coppia $(G, \perp)$ sia un gruppoide. Se l'operazione è dotata di elemento neutro e: $e \perp x = x \perp e = x \;\; \forall x \in G$, in questo caso non esiste un nome per questa struttura algebrica e si dice semplicemente che è un gruppoide dotato di elemento neutro.

Definizione Supponiamo che la coppia $(G, \perp)$ sia un gruppoide dotato di elemento neutro e, si dice che $x \in G$ è simmetrizzabile se esiste $x' \in G$ con $x \perp x' = e = x' \perp x$.

Poichè le definizioni appena date mettono in evidenza, nell'osservazione un gruppoide che ha di buono solo l'elemento neutro e nell'ultima definizione si parla di elemento simmetrizzabile, sono cose che possono risultare surreali, dunque è opportuno riportare un esempio un po' fuori dal normale.

Esempio Considero l'insieme $G = \{1, 2, 3\}$ e definisco la seguente operazione $\perp$ in G (ovvio che devo assegnare ad ogni coppia di GxG un elemento di G, sappiamo che $GxG = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3)\}$.

$1 \perp 1 = 1$, $1 \perp 2 = 2$, $1 \perp 3 = 3$, $2 \perp 1 = 2$, $2 \perp 2 = 1$, $2 \perp 3 = 2$, $3 \perp 1 = 3$, $3 \perp 2 = 3$, $3 \perp 3 = 3$
Abbiamo definito un gruppoide che ha 1 come elemento neutro, l'operazione non è commutativa in quanto $2 \perp 3 = 2$ e $3 \perp 2 = 3$.
Non è associativa in quanto $(2 \perp 3) \perp 2 = 2 \perp 2 = 1$, mentre $2 \perp (3 \perp 2) = 2 \perp 3 = 2$. Questo è un gruppoide che ha solo l'elemento neutro 1. Gli unici elementi simmetrizzabili sono 1 e 2.

Definizione Supponiamo che la coppia $(G, \perp)$ sia un monoide, inoltre ogni $\forall x \in G$ è simmetrizzabile, allora la struttura $(G, \perp)$ si dice GRUPPO.

Esempio I gruppoidi $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Q} - \{0\}, \cdot)$, $(\mathbb{R}, +)$ sono GRUPPI. In un gruppo non è richiesta la proprietà commutativa all'operazione. Quando anche l'operazione è commutativa, allora si parla di GRUPPO ABELIANO. Gli esempi elencati sono tutti gruppi abeliani, tra poco costruiremo un insieme e in esso introdurremo un'operazione con la struttura di gruppo non abeliano.

Consideriamo l'insieme delle applicazioni biettive $f: X = \{1,2,3\} \to X = \{1,2,3\}$, un tale insieme si indica con S_3 e una delle 6 applicazioni biettive è chiamata permutazione di X. Se in tale insieme si introduce l'operazione $\cdot$ ponendo $f \cdot g = g \circ f$, la struttura $(S_3, \cdot)$ è un gruppo non abeliano (vedere testo di Lomonaco per un ragionamento generale).

Le permutazioni di S_3 si potrebbero scrivere in questo modo:

$$id_X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, c_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, c_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$t_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, t_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, t_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

OSSERVAZIONE Queste tabelle sono solo un modo conveniente per rappresentare le funzioni di $\{1,2,3\} \to \{1,2,3\}$, ad esempio c_1 rappresenta la funzione con $f(1) = 2$, $f(2) = 3$, $f(3) = 1$. Successivamente introdurremo le matrici, pur essendo oggetti scritti allo stesso modo si utilizzeranno per altri scopi. In sostanza non vi "sognate" di darle questa interpretazione quando vedrete una matrice. In quel caso una matrice sarà solo una tabella e vi dovete dimenticare dell'interpretazione che abbiamo dato in questa situazione per rappresentare una funzione.

Abbiamo dunque sei applicazioni, questo insieme di applicazioni rispetto alla composizione risulta essere un gruppo. Le sei applicazioni sono tutte definite in X e a valori in X, la composizione è sempre possibile (dominio e codominio coincidono). In generale si conosce dalla nozioni sulle applicazioni che la composizione è:

ASSOCIATIVA: $(f \cdot g) \cdot h = h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f = f \cdot (g \cdot h)$.
ELEMENTO NEUTRO: id_X
SIMMETRIZZABILE: Il simmetrico di id_X è id_X, il simmetrico di t_i è t_i e il simmetrico di c_1 è c_2 e il simmetrico di c_2 è c_1.

La struttura $(S_3, \cdot)$ non è un gruppo abeliano perché se facciamo $t_1 \circ t_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = c_1$, invece componendo $t_2 \circ t_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = c_2$ e quindi $t_1 \circ t_2 \neq t_2 \circ t_1$.

Giocano un ruolo importante anche le strutture algebriche con due operazioni. Una delle più importanti strutture algebriche con due operazioni è quella di ANELLO.

Definizione La struttura algebrica $(G, +, \cdot)$ si dice ANELLO se:

1) $(G, +)$ è un gruppo abeliano.

2) $(G, \cdot)$ è un semigruppo.

3) vale la proprietà distributiva di $\cdot$ rispetto a $+$:

$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ e $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$

Osservazione Nella struttura $(G, +, \cdot)$ abbiamo indicato con $+$ e $\cdot$ le due operazioni, è giusto rimarcare che esse indicano solo due operazioni che soddisfano determinate proprietà e non devono essere confuse con i simboli $+$ e $\cdot$ delle operazioni che ci hanno insegnato alle scuole elementari. In situazioni particolari possiamo dire che i simboli usati coincidono.

Esempio La struttura algebrica $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ e un ANELLO, in questo caso le operazioni sono quelle canoniche.

La prossima definizione è solo per completezza, ma a noi non interessa.

La struttura algebrica $(G, +, \cdot)$ si dice CORPO se:

1) $(G, +)$ è un gruppo abeliano.

2) $(G - \{0\}, \cdot)$ è un gruppo non commutativo.

3) vale la proprietà distributiva di $\cdot$ rispetto a $+$:

$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ e $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$

Invece la prossima definizione è importante perché gioca un ruolo importante nella definizione di spazio vettoriale.

La struttura algebrica $(G, +, \cdot)$ si dice CAMPO se:

1) $(G, +)$ è un gruppo abeliano.

2) $(G - \{0\}, \cdot)$ è un gruppo abeliano.

3) vale la proprietà distributiva di $\cdot$ rispetto a $+$:

$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ (Ho scritto solo una delle due perché l'operazione di prodotto è commutativa).

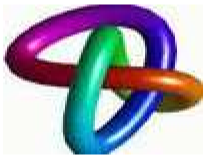
Si può anche dire che un CAMPO è un CORPO COMMUTATIVO.

Esempi notevoli di CAMPI sono: $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$, $(\mathbb{R}, +, \cdot)$, $(\mathbb{C}, +, \cdot)$, che sono rispettivamente il campo dei numeri razionali, il campo dei numeri reali e il campo dei numeri complessi. Ci sono altri esempi di strutture che risultano essere campi, però considerati i nostri scopi non interessa evidenziarli. Per completezza ne riporto uno semplice.

Esempio Sia $K = \{0, 1\}$, in questo insieme definiamo due operazioni $+$ e $\cdot$ nel seguente che segue, sappiamo che $KxK = \{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)\}$:

$0 + 0 = 0$, $0 + 1 = 1$, $1 + 0 = 1$, $1 + 1 = 0$
$0 \cdot 0 = 0$, $0 \cdot 1 = 0$, $1 \cdot 0 = 0$, $1 \cdot 1 = 1$

Con una semplice verifica manuale si osserva che valgono tutte le proprietà che caratterizzano la struttura algebrica di campo, siamo in presenza del campo più "piccolo" al mondo.
http://www.mateweb.altervista.org/



mateweb
Amministratore

Messaggi: 410
Iscritto il: domenica 17 luglio 2011, 16:08

Top

Re: Prima lezione (6 Marzo 2013)

da **rossanaboccia** » sabato 23 marzo 2013, 9:29

Salve Prof.,
perchè nell' ultimo esempio riguardante la definizione di campo risulta "1+1=0" ?

rossanaboccia

Messaggi: 21
Iscritto il: venerdì 15 marzo 2013, 15:37

Top

Re: Prima lezione (6 Marzo 2013)

da **mateweb** » sabato 23 marzo 2013, 15:24

*rossanaboccia ha scritto:*Salve Prof.,

perchè nell' ultimo esempio riguardante la definizione di campo risulta "1+1=0" ?

*rossanaboccia ha scritto:*Salve Prof.,
perchè nell' ultimo esempio riguardante la definizione di campo risulta "1+1=0" ?

Non devi pensare che stiamo eseguendo la somma in $\mathbb{N}$ per come ci hanno insegnato alle scuole elementari.

Questa è una somma con un altro criterio, per esempio potrei considerare $K = \{A, B\}$ e definire un'operazione $+$ interna a K così definita:

$A + A = A, A + B = B, B + A = B, B + B = A$

In tal modo ho definito un'operazione in K, un'operazione è un'istruzione che ad ogni coppia di elementi di K associa un elemento di K.

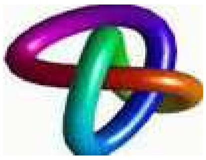
Definita l'operazione, successivamente si studiano le proprietà: commutativa, associativa,.....

Forse colpisce il fatto che $1 + 1 = 0$, mentre nei nostri calcoli quotidiani accettiamo che $1 + 1 = 2$.

Se alla Domenica associo 0, al Lunedì associo 1, al martedì il 2,...., al sabato il 6.

Sappiamo che 5 giorni dopo il giovedì è martedì, in questo caso conveniamo che $4 + 5 = 2$ e questa somma seppur "strana" è conveniente rispetto a $4 + 5 = 9$.

Non sono sicuro di essere stato chiaro, in ogni caso può chiedere ancora oppure a lezione nella pausa cercherò di insistere per essere più convincente.
http://www.mateweb.altervista.org/



mateweb
Amministratore

Messaggi: 410
Iscritto il: domenica 17 luglio 2011, 16:08

Top

Re: Prima lezione (6 Marzo 2013)

da **rossanaboccia** » sabato 23 marzo 2013, 22:41

Se ho ben capito, la somma "4+5= 2" è più conveniente rispetto a "4+5=9" perchè il risultato "2" rispetta,

o meglio, rientra nell' insieme di partenza S=[1,2,3,4,5,6,7] relativo ai giorni della settimana.
Per cui, secondo questo ragionamento:
6+4=3
5+6=4
3+2=5
1+7=1
....
Spero possa correggere le operazioni, se errate.

rossanaboccia

Messaggi: 21
Iscritto il: venerdì 15 marzo 2013, 15:37

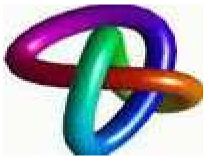
Top

Re: Prima lezione (6 Marzo 2013)

da **mateweb** » sabato 23 marzo 2013, 22:51

> *rossanaboccia ha scritto:*Se ho ben capito, la somma "4+5= 2" è più conveniente rispetto a "4+5=9" perchè il risultato "2" rispetta, o meglio, rientra nell' insieme di partenza S=[1,2,3,4,5,6,7] relativo ai giorni della settimana.
> Per cui, secondo questo ragionamento:
> 6+4=3
> 5+6=4
> 3+2=5
> 1+7=1
> ....
> Spero possa correggere le operazioni, se errate.

Si è così, in questo caso possiamo dire che 0 = 7. Va bene, come vedi abbiamo dato un significato a queste somme e sono più efficaci che non le somme ordinarie.
http://www.mateweb.altervista.org/



mateweb
Amministratore

Messaggi: 410
Iscritto il: domenica 17 luglio 2011, 16:08

Top

Re: Prima lezione (6 Marzo 2013)

da **alecollaruvolo** » martedì 21 maggio 2013, 15:43

Definizione Supponiamo che la coppia G sia un semigruppo. Se l'operazione è dotata di elemento neutro e:

exxex xG, allora esso merita il nome di MONOIDE.

Esempio I gruppoidi 0 e e sono monoidi.

Osservazione Supponiamo che la coppia G sia un gruppoide. Se l'operazione è dotata di elemento neutro e: exxex xG, in questo caso non esiste un nome per questa struttura algebrica e si dice semplicemente che è un gruppoide dotato di elemento neutro.

professore ma qual'è la differenza fra la definizione e l osservazione ?

alecollaruvolo

Messaggi: 3
Iscritto il: martedì 21 maggio 2013, 15:41

Top

Re: Prima lezione (6 Marzo 2013)

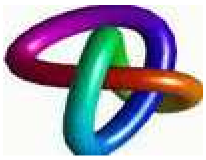
da **mateweb** » mercoledì 22 maggio 2013, 7:19

> *alecollaruvolo ha scritto:*Definizione Supponiamo che la coppia G sia un semigruppo. Se l'operazione è dotata di elemento neutro e: exxex xG, allora esso merita il nome di MONOIDE.
>
> Esempio I gruppoidi 0 e e sono monoidi.
>
> Osservazione Supponiamo che la coppia G sia un gruppoide. Se l'operazione è dotata di elemento neutro e: exxex xG, in questo caso non esiste un nome per questa struttura algebrica e si dice semplicemente che è un gruppoide dotato di elemento neutro.
>
> professore ma qual'è la differenza fra la definizione e l osservazione ?

Nella **Definizione** la struttura $(G, \perp)$ è un semigruppo (operazione associativa) dotato di elemento neutro, quindi un monoide.

Nell'**Osservazione** la struttura $(G, \perp)$ non è richiesta l'associatività e ha l'elemento neutro.

Questa è la differenza!!!
http://www.mateweb.altervista.org/


mateweb
Amministratore

Messaggi: 410
Iscritto il: domenica 17 luglio 2011, 16:08

Top

Re: Prima lezione (6 Marzo 2013)

da **alecollaruvolo** » mercoledì 22 maggio 2013, 15:31

ho capito grazie prof

alecollaruvolo

Messaggi: 3
Iscritto il: martedì 21 maggio 2013, 15:41

Top

Re: Prima lezione (6 Marzo 2013)

da **carmine.ausiello** » venerdì 25 ottobre 2013, 8:12

Salve Prof.
Nell'introdurre un'operazione con la struttura di un gruppo non abeliano vorrei capire con quale criterio t1∘t2=(123231)=c1 e t2∘t1=(123312)=c2

carmine.ausiello

Messaggi: 12
Iscritto il: giovedì 24 ottobre 2013, 17:53

Top

Re: Prima lezione (6 Marzo 2013)

da **mateweb** » venerdì 25 ottobre 2013, 17:29

> *carmine.ausiello ha scritto:* Salve Prof.
> Nell'introdurre un'operazione con la struttura di un gruppo non abeliano vorrei capire con quale criterio t1∘t2=(123231)=c1 e t2∘t1=(123312)=c2

> *carmine.ausiello ha scritto:* Salve Prof.
> Nell'introdurre un'operazione con la struttura di un gruppo non abeliano vorrei capire con quale criterio t1∘t2=(123231)=c1 e t2∘t1=(123312)=c2

Le permutazioni di S_3 si potrebbero scrivere in questo modo:

$$id_X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, c_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, c_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

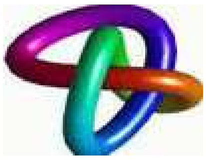
$$t_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, t_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, t_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

La scrittura $t_1 \circ t_2$ vuol dire che agisce prima l'applicazione t_2 e poi t_1:

t_2: 1 va in 3 e t_1: 3 va in 2 e quindi $t_1 \circ t_2$: 1 va in 2
t_2: 2 va in 2 e t_1: 2 va in 3 e quindi $t_1 \circ t_2$: 2 va in 3
t_2: 3 va in 1 e t_1: 1 va in 1 e quindi $t_1 \circ t_2$: 3 va in 1

In definitiva possiamo concludere che $t_1 \circ t_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = c_1$

Prova a costruire con lo stesso criterio $t_2 \circ t_1$
http://www.mateweb.altervista.org/



mateweb
Amministratore

Messaggi: 410
Iscritto il: domenica 17 luglio 2011, 16:08

Top

Prossimo Visualizza ultimi messaggi: Tutti i messaggi Ordina per Ora di invio Crescente Vai

---

Rispondi al messaggio
14 messaggi • Pagina **1** di **2** • **1**, 2

Torna a Appunti delle lezioni

Vai a: Appunti delle lezioni Vai

Chi c'è in linea

Visitano il forum: Nessuno e 1 ospite

- Indice
- Staff • Cancella cookie • Tutti gli orari sono UTC + 1 ora